

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală
7 februarie 2026
Clasa a VIII-a
Barem de notare

Subiectul 1 (21p)

- a) Demonstrați că oricare ar fi numerele reale pozitive x, y este adevărată inegalitatea:

$$\sqrt{6} + \sqrt{x \cdot y} \leq \sqrt{(2+x) \cdot (3+y)}.$$

- b) Determinați numerele raționale a și b care îndeplinesc condiția:

$$a \cdot (\sqrt{6} + 2) - \frac{b}{3-\sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1.$$

Soluție:

- a) Se ridică ambii membri la pătrat și se reduc termenii asemenea.

$$(\sqrt{6} + \sqrt{x \cdot y})^2 \leq (\sqrt{(2+x) \cdot (3+y)})^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2 \cdot \sqrt{6 \cdot x \cdot y} + x \cdot y \leq 6 + 2 \cdot y + 3 \cdot x + x \cdot y \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{6 \cdot x \cdot y} \leq 2 \cdot y + 3 \cdot x \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot y + 3 \cdot x - 2 \cdot \sqrt{6 \cdot x \cdot y} \geq 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2 \cdot y} - \sqrt{3 \cdot x})^2 \geq 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$b) a \cdot (\sqrt{6} + 2) - \frac{b}{3-\sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (\sqrt{6} + 2) - \frac{b \cdot (3+\sqrt{6})}{3} = \sqrt{6} + 1 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6} \cdot (a - \frac{b}{3}) + 2 \cdot a - b = \sqrt{6} + 1 \dots\dots\dots 3p$$

$$\begin{cases} a - \frac{b}{3} = 1 \\ 2 \cdot a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \cdot a + b = -3 \\ 2 \cdot a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \in \mathbb{Q} \\ b = 3 \in \mathbb{Q} \end{cases} \dots\dots\dots 4p$$

Total 21p

Subiectul 2 (21p)

Calculați $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{4051+2\sqrt{2025 \cdot 2026}}}.$

Soluție:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{1 \cdot 2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1 \dots\dots\dots 4p$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2\sqrt{3 \cdot 2}+2} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2} \dots\dots\dots 4p$$

.....

$$\begin{aligned} \sqrt{4051 + 2\sqrt{2026 \cdot 2025}} &= \sqrt{2026 + 2\sqrt{2026 \cdot 2025} + 2025} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2026} + \sqrt{2025})^2} = \sqrt{2026} + \sqrt{2025} \dots\dots\dots 4p \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{4051+2\sqrt{2025 \cdot 2026}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \dots + \frac{1}{\sqrt{2026}+\sqrt{2025}} \dots\dots\dots 4p \\ &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots \dots \dots + \sqrt{2026} - \sqrt{2025} = \sqrt{2026} - 1 \dots\dots 5p \\ &\text{Total 21p} \end{aligned}$$

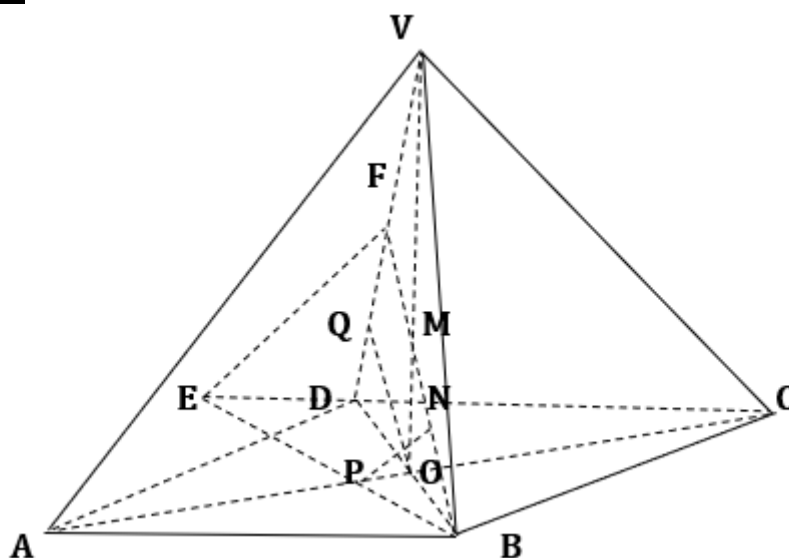
Subiectul 3 (21p)

Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată . Punctul M este mijlocul înălțimii VO, punctul N este mijlocul segmentului BM, iar punctul P aparține segmentului AO, astfel încât $AP = 3 \cdot PO$.

Demonstrați că $PN \parallel (VDC)$.

S.G.M

Soluție:



Notăm $BP \cap DC = \{E\}$ 1p

$$\Delta ABP \sim \Delta CEP \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{PB}{PE} \Rightarrow \frac{PB}{PE} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 3p$$

Notăm $BM \cap VD = \{F\}$ și Q mijlocul lui DF.....2p

În ΔDBF OQ este linie mijlocie $\Rightarrow OQ \parallel FB$ și $OQ = \frac{FB}{2}$2p

În ΔVOQ FM $\parallel$ OQ, M este mijlocul lui VO $\Rightarrow MF$ este linie mijlocie.....2p

$$\Rightarrow MF = \frac{OQ}{2} = \frac{FB}{4} \dots\dots\dots 2p$$

$$NB = MN = \frac{MB}{2} = \frac{1}{2} \cdot (FB - FM) = \frac{1}{2} \cdot \left(FB - \frac{FB}{4} \right) = \frac{3}{8} FB \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow FN = FM + MN = \frac{FB}{4} + \frac{3FB}{8} = \frac{5FB}{8} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{FN} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BN}{NF} = \frac{BP}{PE} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow PN \parallel EF, EF \subset (VDC), NP \not\subset (VDC) \Rightarrow NP \parallel (VDC) \dots\dots\dots 3p$$

Total 21p

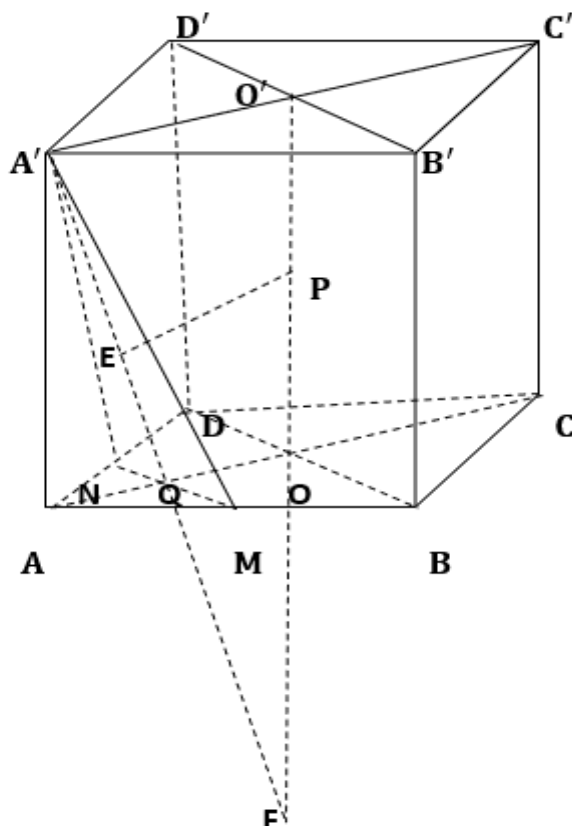
Subiectul 4 (21p)

În cubul ABCDA'B'C'D' $AC \cap BD = \{O\}$ și $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$, punctul M este mijlocul muchiei AB, punctul N este mijlocul muchiei AD, iar punctul P este mijlocul segmentului OO'.

a) Demonstrați că $MN \perp (ACA')$.

b) Demonstrați că distanța de la punctul P la planul determinat de punctele M, N, A' este egală cu jumătate din lungimea muchiei cubului.

Soluție:



a) MN linie mijlocie în $\triangle ABD \Rightarrow MN \parallel DB$2p

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \\ AC \cap AA' = \{A\} \end{array} \right| \Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow MN \perp (ACA') \dots\dots\dots 4p$$

b) Notăm $AO \cap MN = \{Q\}$, $OO' \cap QA' = \{F\}$ și l lungimea muchiei cubului2p

$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle FA'O' \\ OQ \parallel A'O' \end{array} \right| \Rightarrow \triangle FA'O' \sim \triangle FQO \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \frac{FO}{FO'} = \frac{OQ}{A'O'} = \frac{1}{2} \Rightarrow O \text{ mijlocul segmentului } FO' \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow PF = \frac{3l}{2} \text{ și } A'F = \frac{3l\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

Fie $PE \perp A'F$ și demonstrează că $PE \perp (A'MN)$ 2p

$$\triangle FA'O' \sim \triangle FPE \Rightarrow \frac{PE}{A'O'} = \frac{PF}{A'F} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow PE = \frac{PF \cdot A'O'}{A'F} = \frac{\frac{3l}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2}}{\frac{3l\sqrt{2}}{2}} = \frac{l}{2} \dots\dots\dots 3p$$

Total 21p